3 Induktion

3.1 Vollständige Induktion

Die vollständige Induktion ist eine Methode zur Lösung des folgenden Problems: Wie weisen wir nach, dass alle natürlichen Zahlen eine bestimmte Eigenschaft E erfüllen?

Die Lösungsmethode „Vollständige Induktion von $n-1$ nach n" besteht in zwei Schritten, die zusammengenommen folgenden logischen Schluss ermöglichen:

- Induktionsanfang: *Erfüllt* 0 *die Eigenschaft* E *und*
- Induktionsschritt: *folgt für alle* $n > 0$ *die Gültigkeit von* E *für* n *aus der Tatsache, dass* $n-1$ *die Eigenschaft* E *erfüllt* (Induktionsvoraussetzung),

so erfüllen alle Zahlen die Eigenschaft E*.*

Wir wollen diese Beweismethode an einigen Beispielaussagen nachvollziehen:

Proposition 3.A

Für alle natürlichen Zahlen n gilt $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Beweis: (Induktion) Wir definieren zunächst für alle natürlichen Zahlen n:

$$a_n =_{\text{def}} \sum_{k=0}^{n} k$$

Die Eigenschaft E, die wir für alle natürlichen Zahlen zeigen wollen, ist die Gleichheit:

$$E(n) \quad : \quad a_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Wir führen einen Beweis mittels vollständiger Induktion über n.

- Induktionsanfang: Für $n = 0$ gilt $a_0 = \sum_{k=0}^{0} k = 0 = \frac{0 \cdot (0+1)}{2}$, d.h., $E(0)$ gilt.
- Induktionsschritt: Für $n > 0$ führen wir die Aussage $E(n)$ auf die Aussage $E(n-1)$ zurück, um daraus mittels Induktionsvoraussetzung die Aussage $E(n)$ zu beweisen. Für $n-1$ lautet die als wahr vorausgesetzte Aussage

$$E(n-1) \quad : \quad a_{n-1} = \frac{(n-1)((n-1)+1)}{2} = \frac{(n-1)n}{2}$$

Damit erhalten wir durch Abspalten des Summanden für $k = n$ aus a_n:

$$\begin{aligned} a_n &= n + a_{n-1} \\ &= n + \frac{(n-1)n}{2} && \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\ &= \frac{2n + (n-1)n}{2} \\ &= \frac{n(2 + (n-1))}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Damit ist die Proposition bewiesen. ■

Proposition 3.B

Für alle natürlichen Zahlen n gilt $\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$.

Beweis: (Induktion) Die Eigenschaft E, die wir für alle natürlichen Zahlen zeigen wollen, ist die Gleichheit:

$$E(n) \quad : \quad \sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$$

Wir führen einen Beweis mittels vollständiger Induktion über n.

- Induktionsanfang: Für $n = 0$ gilt $\sum_{k=0}^{0}(2k+1) = (2 \cdot 0 + 1) = 1 = (0+1)^2$, d.h., $E(0)$ gilt.
- Induktionsschritt: Für $n > 0$ führen wir die Aussage $E(n)$ auf die Aussage $E(n-1)$ zurück, um daraus mittels Induktionsvoraussetzung die Aussage $E(n)$ zu beweisen. Für $n-1$ lautet die Aussage

  $$E(n-1) \quad : \quad \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) = ((n-1)+1)^2 = n^2$$

  Damit erhalten wir durch Abspalten des Summanden für $k = n$:

  $$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n}(2k+1) &= 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) \\ &= 2n + 1 + n^2 && \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\ &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

Damit ist die Proposition bewiesen. ■

Proposition 3.C

Für alle natürlichen Zahlen n gilt $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Beweis: (Induktion) Die Eigenschaft E, die wir für alle natürlichen Zahlen zeigen wollen, ist die Gleichheit:

$$E(n) \quad : \qquad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Wir führen einen Beweis mittels vollständiger Induktion über n.

- Induktionsanfang: Für $n = 0$ gilt $\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0^3 = 0 = \frac{0^2 \cdot (0+1)^2}{4}$, d.h., $E(0)$ gilt.
- Induktionsschritt: Für $n > 0$ führen wir die Aussage $E(n)$ auf die Aussage $E(n-1)$ zurück. Für $n-1$ lautet die Eigenschaft E:

$$E(n-1) \quad : \qquad \sum_{k=0}^{n-1} k^3 = \frac{(n-1)^2((n-1)+1)^2}{4} = \frac{(n-1)^2 n^2}{4}$$

Damit erhalten wir durch Abspalten des Summanden für $k = n$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^3 &= n^3 + \sum_{k=0}^{n-1} k^3 \\
&= n^3 + \frac{(n-1)^2 n^2}{4} && \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\
&= \frac{4n^3 + n^4 - 2n^3 + n^2}{4} \\
&= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} \\
&= \frac{n^2(n^2 + 2n + 1)}{4} \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4}
\end{aligned}$$

Damit ist die Proposition bewiesen. ■

Ein wichtiges Resultat ist die folgende explizite Formel für die geometrische Reihe.

Proposition 3.D

Es sei $q \neq 1$. Für alle natürlichen Zahlen n gilt $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

Insbesondere ergibt sich für den Spezialfall $q = 2$:

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$$

Beweis: (Induktion) Die Eigenschaft E, die für alle natürlichen Zahlen bewiesen werden soll, lautet:

$$E(n) \quad : \qquad \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

Wir führen einen Beweis mittels vollständiger Induktion über n.

- Induktionsanfang: Für $n = 0$ gilt $\sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1 = \frac{q^{0+1}-1}{q-1}$ für $q \neq 1$, d.h., $E(0)$ gilt.
- Induktionsschritt: Für $n > 0$ führen wir die Aussage $E(n)$ wieder geeignet auf die Aussage $E(n-1)$ zurück. Dieses hat folgendes Aussehen:

$$E(n-1) \quad : \qquad \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{q^{(n-1)+1}-1}{q-1} = \frac{q^n-1}{q-1}$$

  Durch Abspalten des Summanden für $k = n$ erhalten wir somit:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} q^k &= q^n + \sum_{k=0}^{n-1} q^k \\ &= q^n + \frac{q^n-1}{q-1} && \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\ &= \frac{q^n(q-1)+q^n-1}{q-1} \\ &= \frac{q^{n+1}-q^n+q^n-1}{q-1} \\ &= \frac{q^{n+1}-1}{q-1}\end{aligned}$$

Damit ist die Proposition bewiesen. ■

Proposition 3.E

Für alle natürlichen Zahlen n gilt $(n+1)! \geq 2^n$.

Beweis: (Induktion) Wir führen einen Beweis mittels vollständiger Induktion über n.

- Induktionsanfang: Für $n = 0$ gilt $(0+1)! = 1 \geq 1 = 2^0$.
- Induktionsschritt: Für $n > 0$ erhalten wir mittels Abspaltung des größten Faktors:

$$\begin{aligned}(n+1)! &= (n+1) \cdot n! \\ &\geq (n+1) \cdot 2^{n-1} && \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\ &\geq 2 \cdot 2^{n-1} && \text{(wegen } n \geq 1\text{)} \\ &= 2^n\end{aligned}$$

Damit ist die Proposition bewiesen. ■

Mit Hilfe der vollständigen Induktion kann auch ein alternativer Beweis für das Binomialtheorem gegeben werden.

Theorem 2.2 (Binomialtheorem)

Für alle reellen Zahlen x und y und jede natürliche Zahl n gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Beweis: (Induktion) Für beliebige reelle Zahlen x und y führen wir einen Beweis mittels vollständiger Induktion über n.

- Induktionsanfang: Es sei $n = 0$. Dann gilt $(x+y)^0 = 1 = \binom{0}{0} x^0 y^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^0 y^{0-k}$.
- Induktionsschritt: Es sei $n > 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&(x+y)^n \\
&= (x+y) \cdot (x+y)^{n-1} \\
&= (x+y) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-1-k} && \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k+1} y^{n-(k+1)} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k} \\
&= \binom{n-1}{n-1} x^n y^{n-n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \right] x^k y^{n-k} + \binom{n-1}{0} x^0 y^{n-0} \\
&= \binom{n}{n} x^n y^{n-n} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} + \binom{n}{0} x^0 y^{n-0} && \text{(nach Lemma 2.3)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}
\end{aligned}$$

Damit ist das Theorem bewiesen. ■

Mittels Induktion können wir sogar die folgende sensationelle Proposition beweisen.

Proposition 3.F

Alle natürlichen Zahlen sind gleich.

Beweis: Um die Aussage der Proposition zu beweisen, zeigen wir folgende Aussage. Für alle natürlichen Zahlen m, a, b gilt:

$$\text{Ist } \max(a, b) = m, \text{ so gilt } a = b. \tag{3.1}$$

Dies ist leicht einzusehen mittels folgenden Induktionsbeweises über m:

- Induktionsanfang: Es sei $m = 0$. Ist $\max(a, b) = 0$, so folgt $a = b = 0$.
- Induktionsschritt: Es sei $m > 0$. Ist $\max(a, b) = m$, so ist $\max(a-1, b-1) = m-1$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt somit $a-1 = b-1$ und mithin $a = b$.

Damit ist die Aussage (3.1) bewiesen.

Es seien nun a und b natürliche Zahlen. Es sei $m =_{\text{def}} \max(a, b)$. Wegen Aussage (3.1) sind alle natürlichen Zahlen gleich m. ■

Da die Aussage der Proposition ganz offensichtlich falsch ist, haben wir im Beweis einen Fehler gemacht. Welchen?

3.2 Allgemeine Form der vollständigen Induktion

Die Lösungsmethode besteht in zwei Schritten, die zusammengenommen folgenden logischen Schluss ermöglichen:

E sei die nachzuweisende Eigenschaft E und n_0 sie eine natürliche Zahl:

- Induktionsanfang: *Erfüllen* $0, 1, \ldots, n_0$ *die Eigenschaft* E *und*
- Induktionsschritt: *folgt für alle* $n > n_0$ *die Gültigkeit von* E *für* n *aus der Tatsache, dass alle* $m < n$ *die Eigenschaft* E *erfüllen* (Induktionsvoraussetzung),

so erfüllen alle Zahlen die Eigenschaft E.

Wir wollen auch diese Beweismethode an einigen Beispielaussagen nachvollziehten:

Proposition 3.G

Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 4$ gilt $n! \geq 2^n$.

Beweis: (Induktion) Wir führen einen Bewies mittels Induktion über n für $n \geq 4$. (Wir setzen $n_0 =_{\text{def}} 4$.)

- Induktionsanfang: Für $n = 0, 1, 2, 3$ muss nichts gezeigt werden, d.h., die Aussage ist richtig. Für $n = 4$ gilt $4! = 24 \geq 16 = 2^4$.
- Induktionsschritt: Für $n > 4$ erhalten wir mittels Abspaltung des größten Faktors:

$$\begin{aligned} n! &= n \cdot (n-1)! \\ &\geq n \cdot 2^{n-1} && \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\ &\geq 2 \cdot 2^{n-1} && \text{(wegen } n \geq 5) \\ &= 2^n \end{aligned}$$

Damit ist die Proposition bewiesen. ■

Die Fibonacci-Folge (in der hier verwendeten Form) ist wie folgt rekursiv definiert:

$$F_0 =_{\text{def}} 1, \qquad F_1 =_{\text{def}} 2, \qquad F_n =_{\text{def}} F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{fr } n \geq 2$$

Die ersten Glieder dieser Folge sind: $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$ Im Folgenden wollen wir zeigen, dass die Fibonacci-Folge exponentiell wächst. Wegen der rekursiven Definition der Folgenglieder bietet sich dafür ein Induktionsbeweis geradezu an.

Proposition 3.H

Für alle natürlichen Zahlen n gilt $F_n \geq \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n$.

Beweis: (Induktion) Wir führen einen Beweis mittels Induktion über n.

- Induktionsanfang: Wir überprüfen zwei Fälle. Für $n = 0$ gilt $F_0 = 1 = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^0$ und für $n = 1$ gilt $F_1 = 2 \geq \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^1$.
- Induktionsschritt: Für $n > 1$ erhalten aus der Definition von F_n:

$$\begin{aligned}
F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \\
&\geq \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n-2} && \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\
&= \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n-2} \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} + 1\right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n-2} \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

Damit ist die Proposition bewiesen. ■